مقاله

ریاضیات محض در تمدن اسلامی*

یان پ. هوخندایک[۱]
ترجمهٔ راضیه سادات موسوی[۲]

۱. مقدمه

ریاضیات در تمدن اسلامی از قرن دوم تا یازدهم هجری را گروهی «ریاضیات اسلامی» و گروهی دیگر «ریاضیات عربی» می‌خوانند، اما هیچ کدام از این دو عبارت کاملاً مناسب نیستند. بسیاری از ریاضیدانانی که کارهایشان در این مقاله نام برده می‌شود، مسلمان بوده‌اند، اما ریاضیدانان دیگری با زمینه‌های مذهبی دیگر هم بوده‌اند. تعدادی از مسائل ریاضی رابطهٔ ویژه‌ای با مفاهیم اسلامی داشته‌اند، اما بخش عمدهٔ ریاضیات در تمدن اسلامی مستقیماً با مذهب مرتبط نبود. بنابراین استفاده از عبارت‌های «ریاضیات عربی» و «ریاضیدانان عربی» در صورتی بهتر است که صفت «عربی» در معنی زبانی آن درک شود. بسیاری از ریاضیدانان مهم «عربی» که در ایران یا دیگر سرزمین‌های غیر عربی زبان زندگی می‌کردند، در حقیقت عرب نبودند، اما زبان عربی همواره زبان اصلی ریاضیات (و علم) در آن سرزمین‌ها بوده است. در قرن چهارم هجری و پس از آن، برخی از آثار ریاضی به زبان فارسی نگاشته یا ترجمه شده‌اند؛ اما تعداد آن‌ها در مقایسه با آثاری که به عربی نوشته شده ناچیز است، و بیشتر واژگان تخصصی ریاضی در این متون فارسی، از عربی گرفته شده است.[۳]

---

* این مقاله ترجمه‌ای است از:

"Pure mathematics in Islamic civilization", *Companion Encyclopaedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, ed. by Ivor Grattan-Guinness, London-New York (Routledge), pp. 70-79. Reprinted in: Helen Lauer, ed., *History and Philosophy of Science for African Undergraduates*, Ibadan, Nigeria, 2003, pp. 494-499.

۱. Jan P. Hogendijk استاد ریاضیات و پژوهشگر تاریخ ریاضیات و نجوم دانشگاه اوترخت هلند، مشاور علمی نشریهٔ میراث علمی، j.p.hogendijk@uu.nl

۲. دانش آموختهٔ کارشناسی ارشد تاریخ علم، دانشگاه تهران، raziesadatmusavi@gmail.com

۳. بنگرید به «علوم ایرانی، علوم عربی یا علوم دورهٔ اسلامی» (سخن سردبیر)، میراث علمی، سال ۲، شمارهٔ ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۲، ص ۱-۴.

منابع اصلی ما در ریاضیات دورهٔ اسلامی، نسخه‌های خطی عربی هستند کـه کاتبـانی بـین قرن‌هـای چهارم تا سیزدهم هجری رونویسی کرده‌انـد و در بیشـتر مـوارد خودشـان ریاضـیدان نبوده‌انـد (سـزگین، ماتویفسکایا و روزنفلد). مهمترین مجموعه‌های این نسخه‌های خطی در حال حاضـر در خـاور نزدیـک، اروپا و هند نگهداری می‌شوند. اگر چه تاریخ علم دورهٔ اسلامی از ابتدای قرن نـوزدهم مـیلادی مطالعـه شده است، بخش بزرگی از کتاب‌های علمی به زبان عربی هنوز بررسی نشده است، بنابراین دانـش مـا از ریاضیات دورهٔ اسلامی به هیچ وجه کامل نیست. ریاضیات دورهٔ اسلامی را از مطالعهٔ نسـخه‌های خطـی عربی دربارهٔ موضوعاتی خارج از بازهٔ محدودی که امروزه به عنوان «ریاضیات» در نظر گرفته می‌شود نیـز می‌توان شناخت، مانند متن‌ها و جدول‌های نجومی و آثار نورشناسی، فقـه، زبانشناسـی وماننـد این‌هـا. ابزارهایی چون اسطرلاب‌ها و ساعت‌های آفتـابی، و نیـز ترجمـه‌های لاتینـی و عبـری نسـخه‌های خطـی عربی که از میان رفته‌اند، از دیگر منابع شناخت ریاضیات دورهٔ اسلامی هستند.

مطالعهٔ ریاضیات در تمدن اسلامی دلایل مختلفی داشته است. آشنایی با ریاضـیات مقـدماتی، اغلب بخشی از نظام آموزش علوم عقلی محسوب می‌شد. کاربردهـای اولیـهٔ حسـاب و هندسـه در تجارت، فقه، امور دیوانی و مساحی بود. دانش ما دربارهٔ کاربردهای هندسه در معماری و کاشی‌کاری اسلامی اندک است. کاربرد ریاضیات بسیار پیشرفته در نجوم، احکام نجوم و نورشناسی بود. بیشـتر کسانی که ریاضیات پیشرفته را فرا می‌گرفتند، برای این بود که منجم (یا طالع‌بین) شـوند. مهمتـرین دستاوردهای خلاقانهٔ ریاضیات دورهٔ اسلامی را کسانی به وجود آوردند کـه ریاضـیات را بـه خـاطر خودش مطالعه می‌کردند. بخش اساسی پیشرفت‌های ریاضیات (برای مثال، تقریباً تمامی جبر) هیچ گونه کاربردی نداشته است. بعضی از جبردانـان عربـی‌نـویس، از کاربردهـای جبـر در محاسـبات سهم‌الارث بحث می‌کردند، اما این احتمالاً تبلیغی برای ریاضیات بوده است.

مسئلهٔ اصلی در این جا، جنبـه‌های «محـض» ریاضـیات اسـت کـه واژهٔ «محـض» در مفهـوم کم‌کاربرد در دیگر دانش‌ها یا زندگی روزمره به کار می‌رود. بعضی از موضـوعاتی کـه هـر دو جنبـهٔ «محض» و «کاربردی» را دارند، در این مقاله آمده است؛ مثلاً مثلثات و گنج‌نگاشتی در همین جـا بررسی شده است. ینس هویروپ دلایل احتمـالی مهمتـر بـودن ارتبـاط میـان ریاضـیات محـض، کاربردی و عملی در تمدن اسلامی را نسبت به پیش از آن، بررسی کرده است (منابع پایان مقاله).

۲. انتقال ریاضیات به زبان عربی

در آغاز قرن دوم هجری، سرزمین‌های ایران و شام بخشی از حکومت اسـلامی محسـوب می‌شـدند که هنوز بازماندهٔ سنت‌های علمی کهن در آن جا یافت می‌شـد. تـاریخ علـم دورهٔ اسـلامی پـس از پایه‌گذاری حکومت عباسـیان (در سـال ۱۴۲ هجـری) و تأسـیس پایتخـت جدیـد در بغـداد آغـاز

می‌شود. در اواخر قرن دوم هجری، دربار بغداد پذیرای منجمان هندی بود و برخی آثار نجومی از سانسکریت به عربی ترجمه شد. در اوایل قرن سوم هجری، خلفای عباسی آثار علمی یونانیان را گردآوری کردند و «بیت‌الحکمه» را که نوعی فرهنگستان علوم بود، در بغداد بنا نهادند.

در آن زمان بسیاری از آثار علمی، اغلب بیش از یک بار، از یونانی به عربی ترجمه شد. انتقال ریاضیات به هیچ وجه فرآیند ساده‌ای نبود؛ چنان که در خصوص مخروطات آپولونیوس به‌خوبی مشهود است. بنوموسی، سه مهندس توانمند در قرن سوم تصمیم به ترجمهٔ آن گرفتند، اما تنها یک نسخهٔ خطی ناقص از هفت مقالهٔ اول را در اختیار داشتند و نمی‌توانستند مفاهیم آن را دریابند. یکی از این سه برادر به نام حسن، خودش روی نظریهٔ مقاطع استوانه کار کرد، زیرا اعتقاد داشت این مسئله می‌تواند مقدمه‌ای برای نظریهٔ مقاطع مخروطی در کتاب مخروطات باشد. پس از مرگ او، برادرش احمد در شام نسخه‌ای از چهار مقالهٔ اول را با شرحی از اتوکیوس یافت. احمد و برادر دیگرش، محمد، با استفاده از دو نسخهٔ موجود و نظریهٔ حسن، موفق شدند مطالب مخروطات آپولونیوس را دریابند و برای آن که مفهوم‌تر شود، ارجاعات درون متنی به اصل یونانی افزودند. سپس بر ترجمهٔ هفت مقالهٔ اول از هلال حمصی (مقالهٔ اول تا چهارم) و ثابت بن قره (مقالهٔ پنجم تا هفتم) نظارت کردند (تومر، ص۶۲۰-۶۲۹). ترجمهٔ آثار علمی به عربی اغلب نیازمند ابداع اصطلاحات فنی تازه بود. اصطلاحات بیگانه به سادگی در ساختار زبان عربی پذیرفته نمی‌شد، بنابراین ترانویسی همان اصطلاحات مطلوب نبود. از این رو برای مثال، واژهٔ یونانی hyperbolè (هذلولی) ابتدا به صورت «اوبربولا» ترانویسی و بعدها به «قطع زائد» ترجمه شد. پس از ابداع این اصطلاح، واژهٔ اوبربولا دیگر به کار نرفت.

مترجمان عرب چندین اثر ریاضی یونانی را حفظ کردند که اصل یونانی‌شان از میان رفته است، مانند اُکَر منلائوس، کتاب القسمة (در باب تقسیم‌ها) اقلیدس، مقالات پنجم تا هفتم مخروطات آپولونیوس و مقالات چهارم تا هفتم حساب دیوفانتوس. هنوز هم نشانه‌های تازه‌ای از آثار گمشدهٔ ریاضیات یونانی در متون عربی یافته می‌شود.

۳. دستگاه‌های عددنویسی و مفهوم عدد

ریاضیدانان عربی‌نویس، دستگاه‌های مختلفی را برای ثبت اعداد به کار می‌بردند. اعداد هندوعربی در اواخر قرن دوم هجری برای ثبت اعداد صحیح مثبت از هند به ریاضیات دورهٔ اسلامی راه یافت. شیوهٔ استفاده از این «اعداد هندی» در حدود سال ۲۱۵ق در کتابی از محمد بن موسی خوارزمی تبیین شده است. نام این دانشمند در قرن دوازدهم میلادی به صورت الگوریسمی (منشأ واژهٔ امروزی «الگوریسم» یا «الگوریتم») به لاتینی برگردانده شد. در قرن چهارم هجری، دو گونهٔ متفاوت از نمادها ظاهر شدند: ارقام هندی که هنوز هم در خاور نزدیک استفاده می‌شود، و ارقام غبار که در شمال آفریقا و اسپانیا به کار می‌رفت و نمونه‌های اولیهٔ اعداد امروزی 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9 و 0 هستند.

هندسه‌دانان و منجمان دورهٔ اسلامی از دستگاه دیگری استفاده می‌کردند که «حساب منجمـان» خوانده می‌شد و از مجسطی بطلمیوس و دیگر آثار نجومی یونانی گرفتـه شـده بـود. در ایـن نظـام، اعداد صحیح در پایهٔ شصتگانی با حروف الفبا، و کسرها به صورت شصتگانی، همچنان با حـروف الفبا، نوشته می‌شد. مترجمان دورهٔ اسلامی هر حرف یونانی را به حرفی عربی با همان ارزش عددی برگرداندند و نماد صفر یونانی را عیناً به کار بردند، حرف یونانی اُمیکرون با خطـی در بـالای آن: $\bar{o}$. مرتبـه‌های کسـری اعـداد در نظـام شصـتگانی، «دقیقـه» و «ثانیـه» خوانـده می‌شـد. هـیچ نمـاد جداکننده‌ای میان اعداد صحیح و کسرها نبود. کسرهای دهدهی را (که در دستگاه شمار هندوعربی نوشته می‌شود) نخستین بار اقلیدسی (سدهٔ ۴ هـ)، و پس از او سموأل (سدهٔ ۶هـ، بنگریـد بـه: راشـد، ص۱۲۲–۱۲۸) و کاشانی (سدهٔ ۹هـ) به کار بردند.

در دستگاه هندوعربی و «حساب منجمان»، نماد هیچ، صفر خوانـده می‌شـد (لاتینـی شـده بـه صورت cipherum و zephrium، و از آن جا «cipher» و «zero» در زبان انگلیسی)، و به معنـای «جای خالی» در نمایش شصتگانی یا دهدهی اعداد بود. خود صفر عموماً به عنـوان عـدد پذیرفتـه نمی‌شد و اعداد منفی هم در ریاضیات دورهٔ اسلامی مطرح نبود. ریاضیدانان عمل تفریق را به عنوان یک عمل حسابی به کار گرفتند و «منهای ۳» یک عبارت پذیرفتـه در معـادلات یـا چندجملـه‌ای‌ها بود. در سنت هندسهٔ یونانی، پاره‌خط‌های گنگ (اصم)، مانند قطر مربعی به ضلع یک، عدد در نظر گرفته نمی‌شدند. ریاضیدانان عربی‌نویس مشتاق بودند ریشهٔ دوم ۲ را یـک عـدد در نظـر بگیرنـد، و حتی عمر خیام ارزشی عددی برای نسبت‌های میان مقادیر دلخواه وضع کرد. از این رو، بـه محـض آن که یک پاره‌خط واحد انتخاب کنیم، هر پاره‌خطی می‌تواند با یک عدد، یعنی طول آن مرتبط شود. آن چه در این جا روی می‌دهد، بسط آگاهانهٔ مفهوم عدد نیسـت؛ بلکـه تطبیـق نظریـهٔ اعـداد بـرای کاربردشان در محاسبات هندسه و مثلثات است که از زمان بطلمیوس وجود داشته و لازم بوده طول پاره‌خط‌های گنگ محاسبه شود.

اعداد مختلط هیچ‌گاه در ریاضیات دورهٔ اسلامی بروز نیافتند.

۴. جبر

مقصـود از «جبـر» در ایـن جـا، فـن حـل معادلـه و عملیـات ریاضـی بـر روی معـادلات و چندجمله‌ای‌هاست. این که علم جبر چگونـه و تـا چـه حـدی از فرهنگ‌هـای پـیش از اسـلام بـه ریاضیات دورهٔ اسلامی منتقل شده است، مشخص نیست.[۱] اثر متقدم و بسیار موفق عربی در عرضهٔ

۱. بنگرید به مقالهٔ «بحثی دربارهٔ پیدایش جبر در دورهٔ اسلامی»، از مریم روژانسکایا، ترجمهٔ حسین گل‌مژده، میراث علمی، سال ۴، شمارهٔ ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۴، ص ۹۸-۱۰۱.

جبر، کتاب جبر و مقابلهٔ خوارزمی است. او نخست حل شش معادلهٔ متعارف را توضیح می‌دهد که به بیان امروزی عبارتند از: $bx = c$ ، $ax^2 = bx$ ، $ax^2 = c$ ، $ax^2 = bx + c$ ، $ax^2 + c = bx$ و $ax^2 + bx = c$ با این شرط که $a, b, c > 0$. سپس خوارزمی با استفاده از مثال‌های حل شدهٔ بسیار، تحویل معادلات خطی و درجهٔ دوم را به این معادلات متعارف توضیح می‌دهد؛ او معادلهٔ $ax^2 = bx + c$ را به صورت «مال‌هایی برابر با شیءهایی به علاوهٔ عددی است» بیان می‌کند و به جای معادلهٔ امروزی $4x^2 - 3 = 2x$ می‌گوید «چهار مال به‌جز سه درهم برابر است با دو شیء». برای حل این معادله، باید ۳ درهم ناقص (کاهنده) را به سوی دیگر معادله ببریم. اصطلاح فنی این عمل، یعنی جبر (به معنای جبران و ترمیم)، در لاتینی به algebra ترجمه شد.

در این جا مثال‌هایی از پیشرفت‌های جبر دورهٔ اسلامی پس از خوارزمی عرضه می‌کنیم. ابوکامل معادلات درجهٔ دوم با ضرایب گنگ و معادلات درجهٔ چهارمی را که به سادگی (با جایگزینی) قابل تحویل به معادلات درجهٔ دوم بودند بررسی کرد. کرجی و سموأل عبارت‌هایی با توان‌های (صحیح) دلخواه از مجهول، اما بدون نمادی مناسب برای توان، در نظر گرفتند. آن‌ها x^8 را با «مال کعب کعب» (یعنی $x^2.x^3.x^3$) و $1/x^8$ را با «یک جزء از مال کعب کعب» بیان می‌کردند. کرجی دریافت که ریشهٔ دوم چند جمله‌ای $a_{n+k}x^{n+k} + \ldots + a_k x^k$ را می‌توان با استفاده از الگوریتم آشنای استخراج جذر اعداد دهدهی به صورت $a_{n+k}10^{n+k} + \ldots + a_k 10^k$ به دست آورد. کرجی از این الگوریتم تنها در مواردی که چندجمله‌ای داده شده مربع چندجمله‌ای دیگری باشد استفاده کرد، بنابراین پاسخ به راحتی به دست می‌آمد. سموأل نیز دریافت روش تقسیم اعداد دهدهی را می‌توان به همان شیوه برای تقسیم چندجمله‌ای‌ها تعمیم داد.

ریاضیدانان عربی‌نویس تلاش کردند معادلهٔ درجهٔ سوم را به صورت جبری حل کنند، اما موفق نشدند. روش هندسی آن‌ها برای حل این معادلات در بخش ۷ این مقاله بررسی شده است. در قرن نهم هجری، ریاضیدانی از غرب جهان اسلام با نام قلصادی، از علائم اختصاری، بسیار شبیه به آنچه دیوفانتوس در رسالهٔ حساب و جبردانان دورهٔ نوزایی در اروپا به کار بردند، در معادلات استفاده کرد.

۵. نظریهٔ اعداد

بخش‌های مرتبط با نظریهٔ اعداد در اصول اقلیدس و آثار نیکوماخوس و دیوفانتوس در حساب، به عربی ترجمه شدند و بسیاری از ریاضیدانان دورهٔ اسلامی آن‌ها را به طور کامل مطالعه کردند. یکی از دستاوردهای قابل توجه اعراب، دستور اعداد متحاب است که ثابت بن قره آن را کشف و اثبات کرد: اگر $p = 3\left(2^{n-1} - 1\right)$ ، $q = 3\left(2^n - 1\right)$ و $r = 9\left(2^{2n-1} - 1\right)$ همگی اعداد اول باشند، آن گاه اعداد

$a=2^n pq$ و $b=2^n r$ متحاب هستند؛ یعنی مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی a برابر با b، و مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی b برابر با a است. ابن هیثم دریافت که هر عدد اول p مقدار $(p-1)!+1$ را عاد می‌کند، و در قرن چهارم هجری معتقد بودند معادلهٔ $x^3+y^3=z^3$ هیچ جواب صحیحی ندارد (راشد، ص۲۲۰ و ۲۴۲). احتمال نمی‌رود اثبات‌های سخت دو گزارهٔ اخیر در دورهٔ اسلامی عرضه شده باشد. ریاضیدانان عربی‌نویس برخی از معادلات سیاله را با ایجاد تغییرات هوشمندانه در روش‌های یونانی حل کردند (سزیانو ← منابع)، اما در کل هیچ گونه پیشرفت اساسی در روش‌های نظریهٔ اعداد حاصل نشد.

۶. هندسه

هندسه‌دانان عربی‌نویس، تصحیح و شرح آثار کهن هندسی یونانیان، شامل آثار اقلیدس، آپولونیوس، ارشمیدس و منلائوس را پیگیری کردند، و هندسهٔ دورهٔ اسلامی را می‌توان تاحدودی ادامهٔ این آثار در نظر گرفت. اصول اقلیدس الهام‌بخش بررسی‌های عمیقی در مبانی هندسه بوده است. مثلاً برخی از ریاضیدانان تلاش کردند اصل توازی اقلیدس را اثبات کنند، اما برخی دیگر، مانند ابن هیثم و نصیرالدین طوسی، آن را با گزارهٔ دیگری که فکر می‌کردند ساده‌تر و در نتیجه مناسب‌تر است، جایگزین کردند (بنگرید به «جاویش» در منابع). ماهانی تعریف تناسب در اصول اقلیدس را با تعریف معادلی به این صورت عوض کرد که $a:b=c:d$ اگر بسط دو طرف تساوی به صورت کسر مسلسل یکی باشد.

در قرن چهارم هجری، هندسه‌دانان عربی‌نویس از مخروطات آپولونیوس در حل مسائلی که به کمک خط‌کش و پرگار قابل حل نیست، استفاده کردند، مانند ترسیم هفت‌ضلعی منتظم (هوخندایک، ۱۹۸۴)، تثلیث زاویه، محاط کردن پنج‌ضلعی منتظم در مربع، و نیز حل این مسئلهٔ نورشناسی: یافتن محل نقطهٔ بازتاب با دانستن موضع آینهٔ مقعر یا محدب، چشم و شیء. این مسئله که حسن بن هیثم آن را در کتاب المناظر حل کرد، به نام وی «مسئلهٔ ابن هیثم» نامیده شد. تربیعات (تعیین مساحت‌های) سهمی ارشمیدس به عربی انتقال نیافت، اما هندسه‌دانان عربی‌نویس از مقدمهٔ کتاب کره و استوانه می‌دانستند که ارشمیدس روی این موضوع کار کرده است. پس از آن ثابت بن قره مساحت قطعهٔ سهمی را با روش خودش به دست آورد و نیز حجم سهمی‌گونی را که از دوران سهمی حول محورش به دست می‌آید حساب کرد. ابن هیثم این مسئله را برای سهمی‌گونی که حول یکی از مقاطع عرضی‌اش دوران کند، به دست آورد.

ریاضیدانان عربی‌نویس این نظریه‌ها را با روش دقیق ارشمیدسی اثبات کردند: آن‌ها شکل‌های محاط و محیط مناسبی در نظر گرفتند، مساحت یا حجم این شکل‌ها را مشخص کردند، و سپس با

شیوه‌ای غیرمستقیم، حد آن را با برهان خلف به دست آوردند. برای تعیین حجم برخی شکل‌های محاط و محیط، ابن هیثم مسئله‌ای را حل کرد که به لحاظ ریاضی معادل نمایش عبارت $۱^۴+۲^۴+\ldots+n^۴$ به صورت یک چند جمله‌ای درجهٔ پنجم بر حسب n است و ثابت کرد که این نمایش صحیح است (یوشکیویچ، ص۲۸۸-۲۹۵). ابوسهل [بیژن بن رستم] کوهی مرکز ثقل برخی رویه‌ها و اجسام را به دست آورد؛ او (به دلایل نامعلومی) نظریه‌ای تخمینی برای تعیین مرکز ثقل نیم‌دایره وضع کرد و از آن جا π را معادل $۳\frac{۱}{۹}$ به دست آورد که با مقدار ارشمیدسی $۳\frac{۱۰}{۷۱}<\pi<۳\frac{۱}{۷}$ مغایر بود (برگرن، ۱۹۸۳)[1]. بسیاری از ریاضیدانان عربی‌نویس مقادیر بهتری نسبت به کوهی به دست آوردند و در قرن نهم هجری، کاشانی π را تا ۱۷ رقم اعشار به درستی محاسبه کرد (یوشکویچ، ص۳۱۲-۳۱۹).

خلاصه‌ای که در این جا آورده شد، گویای تمامی دستاوردهای مهم علم دورهٔ اسلامی در زمینهٔ هندسهٔ نیست. برای مثال، برخی ریاضیدانان عربی‌نویس روش‌های جدیدی برای مسئلهٔ آپولونیوس عرضه کردند: رسم یک دایرهٔ مماس بر سه دایرهٔ مفروض (با استفاده از خط‌کش و پرگار). همچنین رساله‌های عربی جالبی دربارهٔ روش‌شناسی و آموزش هندسه وجود دارد.

۷. جبر و هندسه

جبر و هندسه دو زمینهٔ متمایز به شمار می‌آمدند که پیوندهایی با هم داشتند. هندسه اغلب به عنوان یکی از مبانی جبر به کار می‌رفت. ثابت بن قره بر مبنای مقالهٔ دوم اصول اقلیدس رساله‌ای در اثبات درستی دستورهای خوارزمی برای حل معادلات درجهٔ دوم نگاشت. برخی دیگر از جبردانان عربی‌نویس پس از او مانند کرجی، سموأل و شرف الدین طوسی تلاش کردندعلم جبر را بر پایهٔ محکمی، یعنی نظریهٔ تناسب مقادیر دلخواه در مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس، قرار دهند. از قرن چهارم هجری به بعد، معادلات درجهٔ سوم را به صورت هندسی با تقاطع دو مقطع مخروطی که از روی ضرایب معادله مشخص می‌شد، حل می‌کردند. روش خیام، مشهور اما ناقص است، زیرا دربارهٔ شرط لازم و کافی وجود ریشه در معادلات غیربدیهی بحث نمی‌کند. در قرن چهارم و پنجم، دریافتند که دو مقطع مخروطی به کار رفته در حل هندسی معادلهٔ $x^۳+c=ax^۲$، بر دایرهٔ $c=(۴/۲۷)a^۳$ مماسند، و شرط درست $c\le(۴/۲۷)a^۳$ به دست آمد[2]. در قرن ششم هجری،

---

۱. بنگرید به مقالهٔ «یادداشتی بر سه قضیهٔ مکانیک کوهی و پیامدهای آن» از ژاک سزیانو، ترجمهٔ رضا علی‌اکبرپور، میراث علمی، سال ۱، شمارهٔ ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۱، ص ۳-۱۸.

۲. این شرط امروزه به صورت $۴p^۳+۲۷q^۲\le ۰$ برای معادلهٔ $x^۳+px+q=۰$ بیان می‌شود.-م

شرف‌الدین طوسی شـرایط لازم و کـافی وجـود ریشـه‌های مثبـت در انـواع معـادلات درجـهٔ سـوم $f(x)=c$ را با استفادهٔ ماهرانه از عبارت‌های $f(y)-f(x)$ و اسـلوب مقالـهٔ دوم اصـول اقلیـدس، یافت (هوخندایک، ۱۹۸۹).

تمام این‌ها مواردی بودند که هندسه در جبر کاربرد داشت. اما از جبر نیز در هندسه، به ویـژه در کاربردهای مثلثاتی استفاده می‌شد. ابوکامل برای به دست آوردن ضلع x در پنج ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۱۰، معادلهٔ درجهٔ دومی به دست آورد، و سپس x را به روش عددی تخمین زد. در قرن چهارم هجری نشان داده شد که رسم هفت‌ضلعی و نه‌ضلعی منتظم معادل حل معادلات درجهٔ سوم هستند. کاشانی نیز اثبات کرد که تثلیث هر زاویهٔ دلخواه معادل حل معادلهٔ درجهٔ سوم است. او با استفاه از این اصل و بهره‌گیری از روش تکرار که در بخش بعدی توضیح داده می‌شود، مقدار جیب (سینوس) یک درجه را محاسبه کرد که کمیتی اساسی در جدول‌های مثلثاتی بود.

۸. ریاضیات عددی

ریاضیدانان عربی‌نویس با استفاده از آنچه امروزه روش روفینی-هـورنر خوانـده می‌شـود، پیشـرفت قابل توجهی در حل عددی معادلات جبری حاصـل کردنـد. روش کلـی چنـین اسـت (بنگریـد بـه «لوکی» در منابع): فرض کنید که $P(x)=Q(x)$ معادله‌ای اسـت کـه می‌خـواهیم آن را حـل کنـیم (البته تمام جملات مثبت هستند). (این توضیح برای یافتن x در دستگاه دهدهی است؛ برای یافتن x در دستگاه شصتگانی، ۱۰ را به ۶۰ تغییر دهید). ابتدا بایـد مرتبـهٔ انـدازهٔ x، یعنـی مقـدار k در رابطهٔ $10^k \leq x < 10^{k+1}$ را بیابیم. سپس می‌توان (بر مبنای روش آزمون و خطا) $x_0 = m.10^k$ را چنـان بـه دسـت آورد کـه m عـدد صـحیح، و یکـی از جفـت گـزاره‌هـای $P(x_0) \leq Q(x_0)$، $P(x_0+10^k) > Q(x_0+10^k)$ یـا $P(x_0) \geq Q(x_0)$، $P(x_0+10^k) < Q(x_0+10^k)$ درسـت باشـد. واضح است که m نخستین رقم بسـط ده دهـی عـدد x اسـت. اگـر رابطـهٔ $x = x_0 + 10y$ را در نظـر بگیریم، آن گاه $P(x)=Q(x)$ باید معـادل رابطـهٔ همـانی $P_1(x)=Q_1(x)$ بـرای چندجملـه‌ای‌های معین P_1 و Q_1 باشد. اکنون می‌توانیم این فرآیند را تکرار کنیم و نخستین رقم بسط دهـدهی y را بـه دست آوریم که در حقیقت رقم دوم x است، و همین طور تا پایان.

روش روفینی-هورنر اساساً الگوریتمی برای به دست آوردن P_1 و Q_1 از P ، Q و x_0 است. از این روش در دورهٔ باستان (به صورت شصتگانی) برای استخراج ریشه‌های دوم، و در چین باسـتان و نیز توسط کوشیار گیلانی در قرن چهارم هجری برای استخراج ریشه‌های سوم اسـتفاده می‌شـد[1]. در

۱. برای اطلاع بیشتر بنگرید به مقالهٔ زیر:
Karine Chemla, “Similarities Between Chinese and Arabic Mathematical Writings: (I) Root Extraction”, *Arabic Science and Philosophy*, vol. 4 (1994), pp. 207-266.

قرن ششم یا پیش از آن، این روش برای تقریب ریشه‌های معادلات درجهٔ سوم دلخواه و نیز معادلاتی با درجات بالاتر، تعمیم داده شد (راشد، ص۱۰۰). کاشانی در قرن نهم هجری ریشهٔ n اُم را برای هر n دلخواه با این روش به دست آورد (برگرن آن را برای $n=۵$ نشان داده است، ۱۹۸۶: ص۵۳-۶۲؛ ترجمهٔ فارسی ص ۶۶-۷۸).

روش تکرار در تقریب عددی ریشه‌های معادلات نیز کاربرد داشت. کاشانی نشان داد که $x = ۶۰\sin ۱^\circ$ ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم $x^۳ + c = bx$ است که در آن $c = ۵۴۰۰۰\sin ۳^\circ$ و $b = ۲۷۰۰$؛ سپس این ریشه را با روش تکرار $x_o = c/b$، $x_n = (x_{n-۱}^۳ + c)/b$ برای $n \geq ۱$ تقریب زد (یوشکویچ، ص۳۲۱). از زمان بطلمیوس نیز روش تکرار در مسائل نجومی و احکام نجومی استفاده می‌شد. در حل این گونه مسائل گاهی لازم بود کمیت θ برای λی داده شده و تابع مفروض f طوری به دست آید که $\lambda = \theta - f(\theta)$. نمونه‌های بسیاری از این گونه مسائل وجود دارد که به کمک روش تکرار $\theta_o = \lambda$، $\theta_n = \lambda + f(\theta_{n-۱})$ حل شده است (یوشکیویچ، ص۳۲۴، برای $f(\theta) = m\sin\theta$). اگر به ازای ξ در همسایگی θ، $f(\xi)$ در مقایسه با ξ کوچک باشد، این روش همگرا خواهد بود. توجه کنید که روش تکرار کاشانی برای مورد خاص $\lambda = c/b$، $f(\theta) = \theta^۳/b$ بود.

۹. سایر زمینه‌ها

از زمان ابوکامل، ریاضیدانان عربی‌نویس به محاسباتی شامل جمع و تفریق‌های پیچیدهٔ ریشه‌های دوم علاقمند بودند. آن‌ها معادل‌های بسط امروزی $(a+b)^n$ بر حسب توان‌های a و b را برای دست کم $n \leq ۱۲$ به دست آوردند. کرجی در متن نایافته‌ای که سموأل از آن یاد کرده است، جدولی از ۱۲ ردیف نخست ضرایب دوجمله‌ای را که امروزه با نام مثلث پاسکال خوانده می‌شود، عرضه کرد (راشد، ص۷۶-۷۷). ابن‌منعم در حدود سال ۶۱۰ق، ضرایب دوجمله‌ای را از منظر ترکیبیاتی محض، بدون اشاره به $(a+b)^n$ بیان کرد (جبّار← منابع). کاشانی نیز ضرایب دوجمله‌ای را برای $n = ۵$ در تقریب عددی ریشهٔ پنجم با صورت ساده شدهٔ روش روفینی-هورنر به دست آورد.

۱۰. تأثیرگذاری ریاضیات اسلامی

در قرن دوازدهم و سیزدهم میلادی (ششم و هفتم هجری)، بسیاری از متون ریاضی دورهٔ اسلامی در اسپانیا و در ابعاد کمتری در جزیرهٔ سیسیل به لاتینی ترجمه شدند. این کار بیشتر شامل ترجمه‌های عربی ریاضیات یونانی بود، اما برخی آثار مؤلفان عربی‌نویس مانند نوشته‌های خوارزمی دربارهٔ اعداد هندی و جبر و المناظر ابن هیثم را نیز در برمی‌گرفت. بنابراین دانشمندان سده‌های میانهٔ اروپا با ریاضیات و نجومی آشنا شدند که بسیار برتر از دانش پیشین آن‌ها بود. نمونهٔ دیگری از این انتقال، مورد لئوناردو فیبوناچی پیزایی است که به غرب سرزمین‌های اسلامی سفر و

در آن جا تحصیل کرد و پس از بازگشت، آثار ریاضی متنوعی نگاشت. نکتهٔ مهمی که باید به خاطر سپرد این است که سطح ریاضیات در شرق دنیای اسلام (عراق و ایران) به مراتب بالاتر از سرزمین‌های غربی بود و این که بیشتر دستاوردهای ریاضی در مناطق غرب مصر ناشناخته بود. از این رو انتقال ریاضیات دورهٔ اسلامی به اروپای سده‌های میانه بسیار ناقص بوده و اغلب آثاری که منتقل می‌شدند (مانند آثاری از خوارزمی) مربوط به مرحله‌ای از پیشرفت بودند که بسیار زودتر در شرق جهان اسلام پشت سر گذاشته شده بود. دستاوردهای مهم‌ترین ریاضیدانان عربی‌نویس مانند ثابت بن قره، ابراهیم بن سنان، کوهی، بیرونی، خیام، شرف‌الدین طوسی و کاشانی، تنها در نتیجهٔ بررسی‌های تاریخی جدید شناخته شده‌اند.

منابع

Berggren, J. L. 1983, 'The correspondence of Abū Sahl al-Kūhī and Abū Ishāq al-Ṣābī: A translation with commentaries', *Journal for History of Arabic Science,* 7, pp. 39-124.

-----1986, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam,* New York: Springer.
انتشارات فاطمی این اثر برگرن را با عنوان گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی (ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی‌اصل و علیرضا جمالی، تهران، ۱۳۷۳) چاپ کرده است.

Djebbar, A. 1983, *L'Analyse combinatoire dans l'enseignement d'Ibn Mun'im,* Orsay: Université de Paris-Sud.

Hogendijk, J. P. 1984, 'Greek and Arabic constructions of the regular heptagon', *Archive for History of Exact Sciences,* 30, pp. 197-330.

-----1989, 'Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī on the number of positive roots of cubic equations', *Historia Mathematica,* 16, pp. 69-85.

Høyrup, J. 1987, 'The formation of "Islamic mathematics": Sources and conditions', *Science in Context,* 1, pp. 281—329.

Jaouiche, K. 1986, *La Théorie des parallèles en pays d'Islam,* Paris: Vrin.

Juschkewitsch, A. P. 1964, *Geschichte der Mathematik im Mittelalter,* Leipzig: Teubner. [The best survey to date. Translated from the Russian *Istoria matematiki b srednie veka,* 1961, Moscow: Nauka. The section on Arabic mathematics was translated into French as: Youschkevitch, A. P. 1976, *Les Mathématiques Arabes (VIIe—XVe siècles),* Paris: Vrin.]

Luckey, P. 1948, 'Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik', *Mathematische Annalen,* 120, pp. 217-74.

Mathematical Reviews. [The best source of bibliographical information on recent publications in the history of Arabic mathematics; subject code 01A30.]

Matvievskaya, G. P. and Rozenfeld, B. A. 1983, *Matematiki i astronomy musul'-manskogo srednevekovya i ikh trudy (VIII-XVII vv.),* Moscow: Nauka. [References to manuscripts of all authors up to 1700. Large bibliography. Knowledge of the Russian alphabet is all that is necessary to consult this work with profit.)

ترجمهٔ انگلیسی با افزوده ها و اصلاحات (بدون ذکر نام ماتویفسکایا):

Rosenfeld, Boris A.; Ihsanoglu, Ekmeleddin, *Mathematicians, Astronomers, and Other Scholars of Islamic Civilization and Their Works (7th-19th c.)*, Istanbul, 2003.

ترجمهٔ فارسی ناویراسته‌ای از این اثر هم با افزوده‌ها و اصلاحات منتشر شده است:

علی اکبر ولایتی، تاریخ علم در فرهنگ و تمدن اسلام و ایران، جلد دوم، کتاب اول و دوم، تهران ۱۳۹۳. این بخش از کل مجموعه، شامل ترجمهٔ عبد الله زرافشان از اثر اصلی روسی است.

Rashed, R. 1984, *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur I'histoire des mathématiques Arabes.* Paris: Les Belles Lettres. [Algebraical interpretation in the style of N. Bourbaki.]

مرحوم محمدهادی شفیعیها ترجمهٔ بخشی از مقدمهٔ این اثر را با عنوان «شرف‌الدین طوسی و مفهوم مشتق» در نشر ریاضی، سال ۴، شمارهٔ ۳، مهرماه ۱۳۷۱، ص ۵۲-۶۰ منتشر کرده‌اند.

Sesiano, J. 1977, 'Le Traitement des équations indéterminées dans le *Badī' fil-Ḥisāb* d'Abū Bakr al-Karajī', *Archive for History of Exact Sciences,* 17, pp. 297-379.

Sezgin, F. 1974, *Geschichte des arabischen Schrifttums,* vol. 5, *Mathematik bis ca. 430 H.,* Leiden: Brill. [References to all known Arabic manuscripts of authors before 1050, Hebrew and Latin translations of such texts, and Arabic translations of ancient texts.]

Toomer, G. L. 1990, *Apollonius, Conics, Books V to VII. The Arab Translation of the Lost Greek Original,* New York: Springer.

... و باید دانست که هندسه به خوانندهٔ آن سود فراوان می‌بخشد؛ خرد وی را تابناک و اندیشهٔ او را مستقیم و راست می‌کند، زیرا کلیهٔ براهین آن از لحاظ ترتیب و انتظام آشکار و روشن است و به هیچ رو به قیاس‌های آن غلط راه نمی‌یابد، ازاین‌رو که قواعد و اصول آن مرتب و منظم است و در نتیجهٔ ممارست در آن دانش، اندیشه از لغزش و خطا دور می‌شود و عقل تمرین‌کنندهٔ آن به همان شیوه با نظم و ترتیب پرورش می‌یابد ... و استادان و شیوخ ما (رح) می‌گفتند: «ممارست در علم هندسه برای اندیشیدن به مثابهٔ صابون برای جامه است که از آن ناپاکی‌ها و آلودگی‌ها را می‌زداید و آن را از هر گونه پلیدی پاک می‌کند.» و همهٔ این‌ها به سبب همان نکته‌ای است که بدان اشاره کردیم و گفتیم دانش مزبور دارای اصول و براهین مرتب و منظمی است. [مقدمهٔ ابن خلدون، ترجمهٔ محمد پروین گنابادی، ۱۳۷۹، ج۲، ص ۲۴۰ و ۲۴۱]